Αριθμός Μητρώου: $\Psi_1\Psi_2\Psi_3\Psi_4\Psi_5$ (π.χ. 09842 ή 11235)

$\downarrow 0 \ \downarrow 1$

$\Psi_1 \to$ ◯ ◯ $\downarrow 2$ $\downarrow 3$ $\downarrow 4$ $\downarrow 5$ $\downarrow 6$ $\downarrow 7$ $\downarrow 8$ $\downarrow 9$

$\Psi_2 \to$ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯

$\Psi_3 \to$ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯

$\Psi_4 \to$ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯

$\Psi_5 \to$ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯ ◯

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ
03 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

---

1. **(010%)** Βαθμός: ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ (μη γράφετε σε αυτήν την γραμμή)

Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) .$$

Λύση.
Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{x-\sqrt{1+x^2}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\\ &= 0 .\end{aligned}$$

---

2. **(010%)** Βαθμός: ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ (μη γράφετε σε αυτήν την γραμμή)

Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x} .$$

Λύση.
Το ζητούμενο προκύπτει από τις σχέσεις

$$-\frac{1}{x}\le\frac{\cos x}{x}\le\frac{1}{x}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 .$$

---

3. **(020%)** Βαθμός: ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ (μη γράφετε σε αυτήν την γραμμή)

Βρείτε μια **συνεχή** συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$xf(x)=1-\cos x,\quad \textbf{για όλα τα}\quad x\in\mathbb{R}.$$

Λύση.
Ο τύπος συνάρτησης

$$\frac{1-\cos x}{x}$$

ικανοποιεί όλες τις ζητούμενες συνθήκες, όμως **όχι** στο ζητούμενο σύνολο $\mathbb{R}$ αλλά στο υποσύνολο $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x}, & \text{αν}\quad x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\\ 0, \quad \text{αν}\quad x=0 .\end{cases}$$

---

4. **(020%)** Βαθμός: ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ (μη γράφετε σε αυτήν την γραμμή)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

(i) Βρείτε το $f(\mathbb{R})$.

(ii) Εξετάστε αν είναι αμφιμονοσήμαντη.

(iii) Αν $\xi \in \mathbb{R}$, βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \xi$.

Λύση.
Έχουμε διαδοχικά

(i) Κάνοντας μελέτη της συνάρτησης, χρησιμοποιώντας παραγώγους, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $A_1 = (-\infty, -1)$ και $A_3 = (1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2 = [-1, 1]$. Έτσι,

$$f(A_1) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$
$$f(A_2) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$
$$f(A_3) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

από τα οποία προκύπτει ότι

$$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] .$$

(ii) Η f **δεν** είναι αμφιμονοσήμαντη διότι $f(A_2) \cap f(A_3) \neq \emptyset$.

(iii) Με βάση το (i), έχουμε

- Αν $\xi < -\frac{1}{2}$ ή $\xi > \frac{1}{2}$, δεν υπάρχει καμία ρίζα.
- Αν $\xi = -\frac{1}{2}$ ή $\xi = \frac{1}{2}$ ή $\xi = 0$, υπάρχει ακριβώς μια ρίζα.
- Αν $-\frac{1}{2} < \xi < 0$ ή $0 < \xi < \frac{1}{2}$, υπάρχουν ακριβώς δυο ρίζες.

5. **(010%)** Βαθμός: ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ (μη γράφετε σε αυτήν την γραμμή)

Υπολογίστε το όριο

$$\lim_n \sqrt[n]{a}, \quad a > 0 .$$

Λύση.
Υπολογίζουμε το όριο της συνάρτησης $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt[x]{a}$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = \lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln a}{x}} = e^{\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln a}{x}\right)} = e^0 = 1 .$$

6. **(010%)** Βαθμός: ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ (μη γράφετε σε αυτήν την γραμμή)

Υπολογίστε το όριο

$$\lim_n \sqrt[n]{n} .$$

Λύση.
Υπολογίζουμε το όριο της συνάρτησης $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt[x]{x}$, χρησιμοποιώντας και τον Κανόνα l'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right)} = e^{\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}\right)} = e^0 = 1 .$$

7. **(020%)** Βαθμός: ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ : ◯ ◯ ◯ ◯ : ◯ (μη γράφετε σε αυτήν την γραμμή)

Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής μόνο σε ένα σημείο του $\mathbb{R}$ και δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$. Απαιτείται πλήρης απόδειξη.
Λύση.
Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν} \quad x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{αν} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής μόνο στο σημείο $x_0 = 1$ και δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη. Η απόδειξη για τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 1$, καθώς και η απόδειξη για το ότι **δεν** είναι συνεχής στα υπόλοιπα σημεία, γίνονται με τη βοήθεια ακολουθιών. Η απόδειξη για το ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ βασίζεται στο γεγονός ότι **δεν** είναι συνεχής σε αυτό το σύνολο, ενώ η απόδειξη ότι **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ γίνεται με τη βοήθεια ακολουθιών.